<table>
<tr><th>صفحه</th><th></th></tr>
<tr><td>۶۰-۶۱</td><td>
۴- با ذکر مثالی نشان دهید که رابطه‌های
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad \int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$$
لزوماً برقرار نیستند.
حل) فرض کنید $f(x) = x^{۳}$ و $g(x) = x^{۲}$ در این صورت:
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{x^{۳}}{x^{۲}}dx = \int x\,dx = \frac{x^{۲}}{۲} + C$$
و حال ضرب آن را بررسی می‌کنیم
$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} = \frac{\int x^{۳}\,dx}{\int x^{۲}\,dx} = \frac{\frac{x^{۴}}{۴}}{\frac{x^{۳}}{۳}} + C = \frac{۳x^{۴}}{۴x^{۳}} = \frac{۳}{۴}x + C$$
درنتیجه $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$
و حاصل ضرب آن را بررسی می‌کنیم:
$$\int f(x).g(x)\,dx = \int x^{۳}.x^{۲}\,dx = \int x^{۵}\,dx = \frac{x^{۶}}{۶} + C$$
$$\int f(x)dx.\int g(x)dx = \int x^{۳}\,dx \int x^{۲}\,dx = \frac{x^{۴}}{۴}.\frac{x^{۳}}{۳} = \frac{x^{۷}}{۱۲} + C$$
درنتیجه $\int f(x).g(x)\,dx \neq \int f(x)dx.\int g(x)dx$
</td></tr>
<tr><td>۶۵</td><td>
د) $\int t\sqrt{۷t^{۲} + ۲}dt$
حل د) عبارت زیر رادیکال را u قرار داده و از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم.
$$\int t\sqrt{۷t^{۲} + ۲}\,dt \qquad ۷t^{۲} + ۲ = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} ۱۴t\,dt = du$$
</td></tr>
</table>

۷۱	ز) $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}dx$ ی) $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^3}dx$ ک) $\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx$ ل) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$
۷۴-۷۵	حل ز) با قرار دادن $u=e^x$ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. $u=e^x \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} du=e^x dx$ $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}du=\int \frac{du}{1-u^2}$ حال از تجزیه کسر استفاده می‌کنیم $\frac{1}{1-u^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}$ با مساوی قرار دادن صورت‌ها داریم: $A+Au+B-Bu=1 \Rightarrow \begin{matrix} A+B=1 \\ A-B=0 \end{matrix} \Rightarrow A=\frac{1}{2} \quad B=\frac{1}{2}$ با جایگذاری داریم: $\int \frac{du}{1-u^2}=\int \frac{\frac{1}{2}}{1-u}du+\int \frac{\frac{1}{2}}{1+u}du=-\frac{1}{2}\text{Ln}\lvert 1-u\rvert+\frac{1}{2}\lvert 1+u\rvert+C=\frac{1}{2}\text{ Ln}\left\lvert\frac{1+e^x}{1-e^x}\right\rvert+C$
۷۸- ۷۶-۷۷	حل ی) ابتدا از تغییرمتغیر داریم: $\text{sinx}=u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \text{cosx}\, dx=du$ بنابراین: $\int \frac{du}{(1-u)^3}=\int (1-u)^{-3}du=\frac{(1-u)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2(1-u)^2}=\frac{-1}{(1-\text{Sin}\, x)^2}+C$ حل ک) $\int \frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x(1+\text{Cos}^2 x)}dx$

ابتدا از تغییر متغیر داریم:

$$\text{Cos}\,x = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} -\text{Sin}\,x = du$$

با جای‌گذاری در انتگرال اصلی داریم:

$$\int \frac{-du}{u(۱-u^{۲})}$$

حال از تجزیه کسر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-۱}{u\left(۱-u^{۲}\right)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{۱-u^{۲}}$$

از برابر قرار دادن صورت‌های کسر داریم:

$$A - Au^{۲} + Bu^{۲} + Cu = -۱$$

$$\begin{cases} A+B=۰ \to B=+۱ \\ C=۰ \\ A=-۱ \end{cases}$$

در این صورت با جایگذاری داریم:

$$\int \frac{u\,du}{u\,(۱-u^{۲})} = \int \frac{-۱}{u}du + \int \frac{u}{۱-u^{۲}}du = -\text{Ln}\left|u\right| - \text{Ln}\left|۱-u^{۲}\right| + C$$

$$= -\text{Ln}\left|\text{Cos}\,x\right| - \text{Ln}\left|۱-\text{Cos}^{۲}x\right| + C$$

حل ل) e^{x} در صورت و مخرج ضرب می‌کنیم

ل) $$\int \frac{dx}{e^{۲x}-۳e^{x}} = \frac{۱}{e^{x}}\int \frac{e^{x}}{e^{۲x}-۳e^{x}}dx = \int \frac{e^{x}}{e^{۳x}-۳e^{۲x}}dx$$

حال از تغییر متغیر داریم:

$$e^{x} = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} e^{x}\,dx = du$$

$$\int \frac{e^{x}}{e^{۳x}-۳e^{۲x}}dx = \int \frac{du}{u^{۳}-۳u^{۲}}$$

از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم

$$\frac{۱}{u^{۳}-۳u^{۲}} = \frac{۱}{u^{۲}(u-۳)} = \frac{Au+B}{u^{۲}} + \frac{C}{u-۳}$$

	از برابر قرار دادن صورت‌های کسر داریم: $Au^{۲}-۳Au+Bu-۳B+Cu^{۲}=۱$ $\begin{cases} A+C=۰\rightarrow C=\frac{۱}{۹} \\ -۳A+B=۰\rightarrow A=-\frac{۱}{۹} \\ -۳B=۱\rightarrow B=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$ با جای‌گذاری داریم: $\int\frac{\left(-\frac{۱}{۹}u-\frac{۱}{۳}\right)du}{u^{۲}}+\frac{۱}{۹}\int\frac{۱}{u-۳}du=-\frac{۱}{۹}\int\frac{u}{u^{۲}}du-\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{u^{۲}}du+\frac{۱}{۹}\int\frac{۱}{(u-۳)}du=$ $=-\frac{۱}{۹}Ln\lvert u\rvert+\frac{۱}{۳u}+\frac{۱}{۹}Ln\lvert u-۳\rvert+C=\frac{-۱}{۹}Ln\lvert e^{x}\rvert+\frac{۱}{۳e^{x}}+\frac{۱}{۹}Ln\lvert e^{x}-۳\rvert+C$
۹۴	ب) $\left(e^{x}+۱\right)yy'=e^{x}$ حل ب) $(e^{x}+۱)yy'=e^{x}\rightarrow(e^{x}+۱)y\frac{dy}{dx}=e^{x}\rightarrow(e^{x}+۱)ydy=e^{x}dx$ $\int ydy=\int\frac{e^{x}}{e^{x}+۱}dx\rightarrow\frac{y^{۲}}{۲}+c=Ln\lvert e^{x}+۱\rvert$
۹۶	س) $\int\frac{dx}{x\left(۳-\ln x\right)\left(۱-\ln x\right)}$ ع) $\int\frac{x^{۴}-x^{۲}+۲}{x^{۲}\left(x+۱\right)}dx$
۹۹	حل س) با استفاده از تغییر متغیر داریم: $Lnx=u\rightarrow\frac{۱}{x}dx=du$

$$\int \frac{dx}{x(۳-Lnx)(۱-Lnx)} = \int \frac{du}{(۳-u)(۱-u)}$$

با استفاده از تجزیه کسر داریم:

$$\ldots du + \int \frac{\frac{۱}{۲}}{(۱-u)} du = -\frac{۱}{۲}Ln|۳-u| + \frac{۱}{۲}Ln|۱-u| + c + \frac{۱}{۲}Ln\left|\frac{۱-u}{۳-u}\right| + C = \frac{۱}{۲}Ln\left|\frac{۱-Lnx}{۳-Lnx}\right| + c$$

حل ع) چون درجه صورت بیشتر از مخرج باشد پس تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۴ - x^۲ + ۲ & x^۳ + x^۲ \\ \hline -x^۴ - x^۳ & x - ۱ \\ \hline -x^۳ - x^۲ + ۲ & \\ +x^۳ + x^۲ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{x^۴ - x^۲ + ۲}{x^۳ + x^۲} = \int (x-۱)dx + \int \frac{۲}{x^۳ + x^۲}dx = \frac{x^۲}{۲} - x + ۲\int \frac{۱}{x^۳ + x^۲}dx$$

حال $\int \frac{۲}{x^۳ + x^۲}dx$ را تجزیه می‌کنیم

$$\int \frac{۲}{x^۳ + x^۲}dx = \int \frac{-۲x + ۲}{x^۲}dx + \int \frac{۲}{x+۱}dx = \int \frac{-۲x}{x^۲}dx + \int \frac{۲dx}{x^۲} + \int \frac{۲}{x+۱}dx =$$

$$-Ln\left|x^۲\right| - \frac{۱}{x} + ۲Ln|x+۱| + c$$

در این صورت $\int \frac{x^۴ - x^۲ + ۲}{x^۳ + x^۲}dx = \frac{x^۲}{۲} - x - Ln\left|x^۲\right| - \frac{۱}{x} + ۲Ln|x+۱| + c$

۱۰۰ و) $\int_۰^۲ \left[x^۲\right]dx$

۱۰۲ حل و) با توجه به این که:

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ < ۱ \rightarrow [x^۲] = ۰$$

<table>
<tr>
<td>

$۱ \le x < \sqrt{۲} \Rightarrow ۱ \le x^{۲} < ۲ \to [x^{۲}] = ۱$

$\sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳} \Rightarrow ۲ \le x^{۲} < ۳ \to [x^{۲}] = ۲$

$\sqrt{۳} \le x < ۲ \Rightarrow ۳ \le x^{۲} < ۴ \to [x^{۲}] = ۳$

در این صورت:

$$\int_{۰}^{۲}[x^{۲}]dx = \int_{۰}^{۱}[x^{۲}]dx + \int_{۱}^{\sqrt{۲}}[x^{۲}]dx + \int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۳}}[x^{۲}]dx + \int_{\sqrt{۳}}^{۱}[x^{۲}]dx =$$

$$۰ + x\Big|_{۱}^{\sqrt{۲}} + ۲x\Big|_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۳}} + ۳x\Big|_{\sqrt{۳}}^{۲} = ۵ - \sqrt{۲} - \sqrt{۳}$$

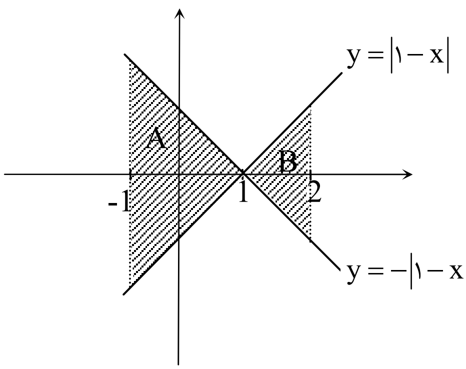
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

ه) $f(x) = |۱-x|$ و $g(x) = -|۱-x|$ در بازه‌ی $[-۱,۲]$

و) $f(x) = xe^{x}$ و $g(x) = x$ در بازه‌ی $[۰,۱]$

</td>
<td>۱۰۳</td>
</tr>
<tr>
<td>

حل) با توجه به شکل زیر داریم:



بنابراین:

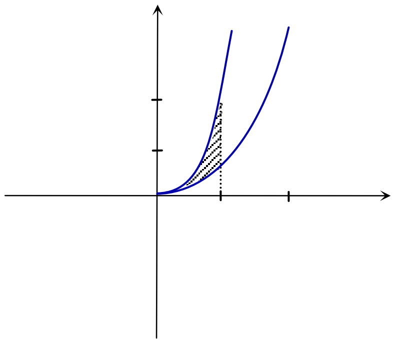
$$S(A) = \int_{-۱}^{۱}(۱-x)-(x-۱)dx = \int_{-۱}^{۱}(۲-۲x)dx = ۲x - x^{۲}\Big|_{-۱}^{۱} = ۴$$

$$S(B) = \int_{۱}^{۲}(x-۱)-(۱-x)dx = \int_{۱}^{۲}(۲x-۲)dx = x^{۲} - ۲x\Big|_{۱}^{۲} = ۱$$

در این صورت: $S_{\text{کل}} = S(A) + S(B) = ۴ + ۱ = ۵$

و) $f(x), xe^{x}, g(x) = x \ [۰,۱]$

</td>
<td>۱۰۵-۱۰۶</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>حل) با توجه به شکل داریم:

$\int_{۰}^{۱}(xe^x - x)dx = \int_{۰}^{۱} xe^x dx - \int_{۰}^{۱} xdx = xe^x - e^x - \frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{۱} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲}$</td></tr>
<tr><td>۱۶۷</td><td>۱۰- با ارائه مثالی برای ماتریس‌های A، B و C نشان دهید که تساوی $AB = AC$ همواره تساوی $B = C$ را نتیجه نمی‌دهد.
حل) قرار دهید:
$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
داریم:
$AB = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$
به طوری که دیده می‌شود که $B \neq C$ ولی $AB = AC$</td></tr>
<tr><td>۱۷۲</td><td>ه) $E = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>۱۷۴-۱۷۵</td><td>حل هـ) ابتدا دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم. چون ماتریس مثلثی است پس:
$|E| = ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۴ \neq ۰$
پس وارون‌پذیر است. حال ماتریس همسازه آن را به دست می‌آوریم:</td></tr>
</table>

$$\Delta_{11}=(-1)^{2}\begin{vmatrix}1&0&3\\0&2&5\\0&0&1\end{vmatrix}=2 \qquad \Delta_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}0&0&3\\0&2&5\\0&0&1\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0&1&2\\0&0&5\\0&0&3\end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_{14}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&2&5\\0&0&1\end{vmatrix}=-4 \qquad \Delta_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&2&5\\0&0&1\end{vmatrix}=4$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}2&2&-1\\0&0&5\\0&0&1\end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_{24}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}2&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&0&3\\0&0&1\end{vmatrix}=-1 \qquad \Delta_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&0&3\\0&0&1\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}2&2&-1\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=2 \qquad \Delta_{34}=(-1)^{7}\begin{vmatrix}2&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_{41}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&0&3\\0&2&5\end{vmatrix}=19 \qquad \Delta_{42}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&0&3\\0&2&5\end{vmatrix}=-12$$

$$\Delta_{43}=(-1)^{7}\begin{vmatrix}2&2&-1\\0&1&3\\0&0&5\end{vmatrix}=-10 \qquad \Delta_{44}=(-1)^{8}\begin{vmatrix}2&2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4$$

در این صورت

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}2&-4&-1&19\\0&4&0&-12\\0&0&2&-10\\0&0&0&4\end{bmatrix} \qquad \Delta=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-4&4&0&0\\-1&0&2&0\\19&-12&-10&4\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{19}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{10}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۱۸۲

حل ج)

$$[C|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-8R_1+R_3\to R_3]{6R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{4}{3}R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ - & -3 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 8\end{array}\right]$$

چون دارای یک سطر صفر می‌باشد امکان تبدیل به ماتریس همانی نمی‌باشد پس واران‌پذیر نیست.

حل د)

$$d=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[-7R_1+R_3\to R_3]{-3R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -7 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

چون دارای یک سطر صفر می‌باشد پس امکان تبدیل ماتریس همانی نمی‌باشد پس وارون‌پذیر نیست.

ج) $\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$	۱۸۸
ج) $\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$	۱۸۹
حل) $D = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad \lvert D \rvert = ۱۴$ $\Delta_{۱۱} = (-۱)^{۱۱} \begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۱ \qquad \Delta_{۱۲} = (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۲ \qquad \Delta_{۱۳} = (-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$ $\Delta_{۲۱} = (-۱)^{۳} \begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = +۳ \qquad \Delta_{۲۲} = (-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۸ & ۵ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = -۸ \qquad \Delta_{۲۳} = (-۱)^{۵} \begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$ $\Delta_{۳۱} = (-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۵ \qquad \Delta_{۳۳} = (-۱)^{۶} \begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = -۸-۶ = -۱۴$	۱۹۰

۱۹۳

حل ج)

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_۱ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{۱}{۲}R_۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-۲R+R_۳ \to R_۳} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون سطر سوم صفر می‌شود پس تبدیل به ماتریس همانی نمی‌شود پس واران ندارد.

۱۹۶

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$

۱۹۷-۱۹۶

حل ج)

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{۱۱} = (-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۷ \end{vmatrix} = ۲۶ \qquad \Delta_{۱۲} = (-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix} = -۹ \qquad \Delta_{۱۳} = (-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix} = -۱۶$$

$$\Delta_{۲۱} = (-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۸ \\ ۲ & ۷ \end{vmatrix} = ۲ \qquad \Delta_{۲۲} = (-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۸ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix} = -۱۸ \qquad \Delta_{۲۳} = (-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۸$$

$$\Delta_{۳۱} = (-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} = -۳۰ \qquad \Delta_{۳۲} = (-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۱ & ۸ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۱۵ \qquad \Delta_{۳۳} = (-۱)^{۶}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} ۲۶ & -۹ & -۱۶ \\ ۲ & -۳۳ & ۸ \\ -۳۰ & ۱۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \text{adjc} = \Delta^t = \begin{bmatrix} ۲۶ & ۲ & -۳۰ \\ -۹ & -۳۳ & ۱۵ \\ -۱۶ & ۸ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۲۷	د) $\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ + x_۴ = ۵ \\ x_۱ + x_۲ - ۳x_۳ - ۴x_۴ = -۱ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ - ۲x_۳ + x_۴ = ۸ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ - ۳x_۴ = ۲ \end{cases}$
۲۲۸-۲۲۹	حل د) ابتدا معکوس ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم: $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۳ & -۴ \\ ۳ & ۶ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۱۲۰} \begin{bmatrix} -۱۲۰ & -۱۲۰ & ۰ & ۱۲۰ \\ ۶۹ & ۷۳ & -۱۷ & -۸۰ \\ ۱۵ & ۳۵ & ۵ & -۴۰ \\ -۲۴ & -۸ & -۸ & ۴۰ \end{bmatrix}$ بردار مجهولات را به دست آورید: $X = A^{-۱}B = A^{-۱}\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۸ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۱}{۵} \\ ۰ \\ \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$ در این صورت $x = ۲$ و $y = \frac{۱}{۵}$ و $z = ۰$ و $w = \frac{۲}{۵}$
۲۲۹	د) $\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ = ۱ \\ x_۱ + ۲x_۳ + x_۴ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۴ = ۰ \end{cases}$
۲۳۰-۲۳۱	حل د) ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم: $\|A\| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۳$

حال برای حل آن از روش دستور کرامر استفاده می‌شود:

$$|A_1|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&-2\\0&0&2&1\\0&1&0&1\end{vmatrix}=-2 \qquad |A_2|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&-2\\1&0&2&1\\1&0&0&1\end{vmatrix}=2$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&-2\\1&0&0&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}=1 \qquad |A_4|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&2&0\\1&1&0&0\end{vmatrix}=0$$

بنابراین:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-2}{3} \qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{2}{3} \qquad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{1}{3} \qquad x_4=0$$

۴- به ازای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases}x+y+z=2\\x-ky-2z=-1\\2x+y-z=4\end{cases}$ دارای جواب یکتا است؟

حل: اگر دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد دستگاه $Ax=B$ دارای جواب یکتاست پس

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-k&-2\\2&1&-2\end{vmatrix}=3k \Rightarrow 3k\neq 0 \Rightarrow k\neq 0$$

۲۳۵

و) $\begin{cases}x+3y+z+w=3\\2x-2y+z+2w=8\\x+11y+2z+w=1\end{cases}$

ز) $\begin{cases}x+y+z+w=0\\2x+3y-z-w=2\\x-y+2z+2w=3\\2x+5y-2z-2w=4\end{cases}$

	ح) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$
۲۳۸- ۲۳۷-۲۳۶	حل و) $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-7R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \\ 0 & 10 & -10 & -21 \end{array}\right]$ $\xrightarrow{2R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{R_3}{-4}\to R_3]{\frac{R_2}{5}\leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{array}\right]$ $\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y - \frac{3}{8}z = -\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{20}, y = \frac{-7}{20}, z = \frac{7}{4}$ حل ح) $\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1+R_4\to R_4]{\substack{-2R_1+R_2\to R_2 \\ -R_1+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right]$ $\xrightarrow[-3R_2+R_4\to R_4]{2R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_4\to R_4} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$ ماتریس فوق به صورت ماتریس سطری پلکانی می‌باشد با توجه به سطر آخر دستگاه جواب ندارد.

حل ز)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۱ & ۲ & ۸ \\ ۱ & ۱۱ & ۲ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow[-R_۱+R_۳\to R_۳]{-۲R_۱+R_۲\to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۸ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۸ & ۱ & ۰ & -۲ \end{array}\right] \xrightarrow{-R_۲+R_۳\to R_۳}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۸ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{۱}{۸}R_۲\to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & \frac{-۱}{-۸} & ۰ & \frac{۲}{-۸} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+۳y+z+w=۳ \\ y+\frac{z}{۸}=\frac{۱}{۲} \\ ۰=۰ \end{cases}$$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲۳۸

د) $\begin{cases} ۲x_۱+x_۲+x_۳=۱ \\ x_۱+۴x_۲-۲x_۳=۱ \\ ۵x_۱-۸x_۲+۲x_۳=۵ \end{cases}$

۲۳۹-۲۴۰

حل د)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & -۲ & ۱ \\ ۵ & -۸ & ۲ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱\leftrightarrow R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۵ & -۸ & ۲ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow[-۵R_۱R_۳\to R_۳]{-۲R_۱+R_۲\to R_۲}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۷ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۲۸ & ۱۲ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{-۴R_۲+R_۳\to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۷ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۸ & ۴ \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{۱}{۷}R_۲\to R_۲]{-\frac{۱}{۸}R_۳\to R_۳}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{-۵}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{array}\right] \xrightarrow{-۴R_۲+R_۱\to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۶}{۷} & \frac{۳}{۷} \\ ۰ & ۱ & \frac{-۵}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{-۶}{۷}R_۳+R_۱\to R_۱]{\frac{۵}{۷}R_۳+R_۲\to R_۲}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۶}{۷} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{-۳}{۱۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{-۱}{۲} \end{array}\right] \Rightarrow x=\frac{۶}{۷} \quad y=\frac{-۳}{۱۴} \quad z=-\frac{۱}{۲}$$

۲۴۲

۱۰- نشان دهید دستگاه زیر دارای جواب نیست.

$$\begin{cases} ۴x_۱-۵x_۲-۷x_۳=۱۵ \\ ۳x_۱+۲x_۲-۶x_۳=۸ \\ x_۱-۷x_۲-x_۳=۶ \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۴ & -۵ & -۷ & ۱۵ \\ ۳ & ۲ & -۶ & ۸ \\ ۱ & -۷ & -۱ & ۶ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳\leftrightarrow R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۷ & -۱ & ۶ \\ ۳ & ۲ & -۶ & ۸ \\ ۴ & -۵ & -۷ & ۱۵ \end{array}\right] \xrightarrow[-۴R_۱+R_۳\to R_۳]{-۳R_۱+R_۲\to R_۲}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۷ & -۱ & ۶ \\ ۰ & ۲۳ & -۳ & -۱۰ \\ ۰ & ۲۳ & -۳ & -۹ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲+R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۷ & -۱ & ۶ \\ ۰ & ۲۳ & -۳ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{array}\right]$$

دستگاه ناسازگار است و جواب ندارد.

۲۴۴

ج) $\begin{cases} \frac{x_۱}{۲}+x_۲=۲ \\ ۲x_۱+x_۲+x_۳=-۱ \\ x_۱-x_۲+۲x_۳=۱ \end{cases}$

د) $\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۳x_۳=-۱ \\ -x_۱+x_۳=۲ \\ ۲x_۱+۴x_۲-۳x_۳=۰ \end{cases}$

۲۴۴-۲۴۵

حل ج)

$$A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{\frac{-۳}{۲}}\begin{bmatrix}۳ & -۲ & ۱\\ -۳ & ۱ & -\frac{۱}{۲}\\ -۳ & \frac{۳}{۲} & -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-۱}B=A^{-۱}\begin{bmatrix}۲\\ -۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۵\\ ۶\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۶\,,\ y=۵,\ z=۶$$

حل د)

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۴ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۸}\begin{bmatrix}-۴ & ۱۸ & ۲\\ -۱ & -۹ & -۴\\ -۳ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-۱}B=A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۴۰}{۱۸}\\ \frac{۱۷}{۱۸}\\ \frac{-۴}{۱۸}\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{-۴۰}{۱۸}\,,\ y=\frac{۱۷}{۱۸},\ z=\frac{-۴}{۱۸}$$

۲۴۶

حل ج)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}}=\frac{۹}{\frac{-۳}{۲}}=-۶\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & ۲ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}}=\frac{\frac{-۱۵}{۲}}{\frac{-۳}{۲}}=۵$$

	$z=\dfrac{\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ & -۱ & ۲\end{vmatrix}}=\dfrac{-۹}{-\frac{۳}{۲}}=۶$ حل د) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۴ & -۳\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۴ & -۳\end{vmatrix}}=\dfrac{۴}{-۱۸}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}۱ & -۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۳\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۴ & -۳\end{vmatrix}}=\dfrac{-۱۷}{-۱۸}$ $\grave{z}=\dfrac{\begin{vmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۲\\ ۲ & ۴ & ۰\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۴ & -۳\end{vmatrix}}=\dfrac{۴}{-۱۸}$
۲۴۷	د) $\begin{cases}x_۱+۲x_۲+۳x_۳=۶\\ x_۱+۳x_۲+۵x_۳=۹\\ x_۱+۵x_۲+۱۲x_۳=۱۸\end{cases}$ ه) $\begin{cases}۴x+۵y+z=۱۸\\ ۶x+۳y+۶z=۹\\ x+۲y=۶\end{cases}$

	و) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$
۲۴۸-۲۴۹	حل د)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 12 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 2 + 3z = 6 \\ y + 2z = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = 1, z = 1$$

حل هـ)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 1 & 18 \\ 6 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow[-4R_1+R_2\to R_3]{-6R_1+R_2\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 6 & -27 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{9}R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_2+R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ y - \frac{2}{3}z = 1 \Rightarrow y = 1, x = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

حل و)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 02 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲+R_۳\to R_۳}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & -۳ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۵ & -۶\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x-۲y-۳z=۲\\ y+۵z=-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l} x_۰=-۱۰-۷x_۳\\ y=-۶-۵x_۳\end{array}$$

۲۵۰

و) $\begin{cases}x+۲y+۲z=۲\\ ۳x-۲y-z=۵\\ ۲x-۵y+۳z=-۴\\ x+۴y+۶z=۰\end{cases}$

۲۵۲

حل و)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۳ & -۲ & -۱ & ۵\\ ۲ & -۵ & ۳ & -۴\\ ۱ & ۴ & ۶ & ۰\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{-R_۱+R_۴\to R_۴\\ -۲R_۱+R_۳\to R_۳}]{-۳R_۱+R_۲\to R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۱ & -۷ & -۱\\ ۰ & -۹ & -۱ & -۸\\ ۰ & ۲ & ۴ & -۲\end{array}\right]\xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۴}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴ & -۲\\ ۰ & -۹ & -۱ & -۸\\ ۰ & -۸ & -۷ & -۱\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{۲}R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & -۹ & -۱ & -۸\\ - & -۸ & -۷ & -۱\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{۹R_۲+R_۳\to R_۳\\ ۸R_۲+R_۴\to R_۴}]{-۲R_۲+R_۱\to R_۱}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۲ & ۴\\ - & ۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۱۷ & -۱۷\\ ۰ & ۰ & ۹ & -۹\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{۳}R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۲ & ۴\\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۹ & -۹\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{۲R_۳+R_۱\to R_۱\\ ۹R_۳+R_۴\to R_۴}]{-۲R_۳+R_۲\to R_۲}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۱\\ z=-۱\end{cases}$$

۲۹۰	ح) $G=\begin{bmatrix} ۴ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و) $H=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
۲۹۲-۲۹۳	حل ح) $\lvert A-\lambda I\rvert=\begin{bmatrix} ۴-\lambda & -۵ & ۱ \\ ۱ & -\lambda & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱-\lambda \end{bmatrix}=\lambda(\lambda-۲)(\lambda-۱)=۰$ پس $\lambda=۰,۱,۲$ مقادیر ویژه ماتریس می‌باشد: $\xrightarrow{\lambda=۰}(A-\lambda I)u=۰\begin{bmatrix} ۴ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=۰\Rightarrow x=y=z$ درنتیجه بردار نظیر $\lambda=۰$ بر حسب x برابر است با: $\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\lambda=۱}(A-\lambda I)u=۰\begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=۰\Rightarrow ۳x+۲y+z=۰$ درنتیجه بردار نظیر $\lambda=۱$ بر حسب z برابر است با: $\begin{bmatrix} ۳z \\ ۲z \\ z \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\lambda=۲}(A-\lambda I)u=۰\begin{bmatrix} ۲ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=۰\Rightarrow ۷x+۳y+z=۰$

درنتیجه بردار نظیر $\lambda = ۲$ بر حسب z برابر است با: $\begin{bmatrix} ۶z \\ ۳z \\ z \end{bmatrix}$

حل و)

$$\left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix} ۳-\lambda & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱-\lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲-\lambda & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = (۳-\lambda)(۱-\lambda)(۲-\lambda)^۲ = ۰$$

پس $\lambda = ۳,۱,۲$

بردار ویژه آن را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\lambda=۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴x - ۲y = ۰ \\ -z + w = ۰ \\ w = ۰ \end{cases}$$

درنتیجه بردار نظیر بر حسب x برابر است با: $\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\lambda=۱} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = ۰ \begin{cases} ۲x = ۰ \\ ۴x = ۰ \\ z + w = ۰ \\ w = ۰ \end{cases}$$

درنتیجه بردار نظیر بر حسب y برابر است با: $\begin{bmatrix} ۰ \\ y \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\lambda=2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=0\ \begin{cases}x=0\\4x-4y=0\\w=0\end{cases}$$

درنتیجه بردار نظیر بر حسب x برابر است با: $\begin{bmatrix}0\\0\\z\\0\end{bmatrix}$

۲۹۴

د) $T:R^3\to R^3$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(x+3y,-2x+2y-z,4x-2z)$

ه) $T:R^3\to R^3$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(3x,2y-5z,y-2z)$

و) $T:R^3\to R^3$ با ضابطه‌ی

$$T(x,y,z)=(x-3y+3z,3x-5y+3z,6x-6y+4z)$$

۲۹۴-۲۹۵

حل د) ماتریس نمایشگر عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\-2&2&-1\\4&0&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0\\2&\lambda-2&1\\4&0&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-28=0$$

دستگاه دارای دو جواب غیر حقیقی و جواب حقیقی ۲/۵۴- می‌باشد.

حل ه)

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&-5\\0&1&-2\end{bmatrix}\to|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&-5\\0&1&-2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda^2+1)=0$$

	$$\xrightarrow{\lambda=۳}\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&-۱&-۵\\۰&۱&-۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{cases}-y-۵z=۰\\y-۵z=۰\end{cases}\Rightarrow y=z$$ پس می‌توان گفت $\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}$ یک بردار ویژه $\lambda=۳$ می‌باشد. حل و) $$\begin{bmatrix}۱&-۳&۳\\۳&-۵&۳\\۶&-۶&۴\end{bmatrix}\to\begin{vmatrix}۱-\lambda&-۳&۳\\۳&-۵-\lambda&۴\\۶&-۶&۴-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{۳}-۱۲\lambda-۱۶=(\lambda+۲)^{۲}(\lambda-۴)=۰$$ دارای جواب حقیقی $\lambda=-۲,۴$ می‌باشد. $$\xrightarrow{\lambda=-۲}\begin{bmatrix}۳&-۳&۳\\۳&-۳&۳\\۶&-۶&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Rightarrow y=x+z\xrightarrow[\text{۱۰۰}]{\text{بردار}}(۱,۳,۲)$$ $$\xrightarrow{\lambda=۴}\begin{bmatrix}۳&-۳&۳\\۳&-۹&۳\\۶&-۶&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=۰\Rightarrow y=x\ ,\ z=۲x\xrightarrow[\text{۱۰۰}]{\text{بردار}}(۱,۱,۲)$$
۳۴۸	د) $$w=\frac{xyz}{x+y+z}$$
۳۴۸	د) $$df=\frac{yz(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^{۲}}dx+\frac{xz(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^{۲}}dy+\frac{xy(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^{۲}}$$
۳۵۰	ج) $x=(u-v)^{۵}, y=e^{u+v}$ $\quad z=\sin x\cos y$ د) $x=\frac{۳}{u+v}, y=\frac{u+v}{۳}$ $\quad z=\frac{۱}{x}+y$

۳۵۲	حل ج) با جای‌گذاری در (۱) داریم: $\frac{dz}{dv}=(\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y)۵(u-v)^{۴}(-۱)\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}y.e^{u+v}$ $\xrightarrow[=e^{u+v}]{(u-v)^{۵}}\frac{dz}{dv}=\operatorname{Cos}(u-v)^{۵}\operatorname{Cos}(e)^{u+v}۵(u-v)^{۴}(-۱)-\operatorname{Sin}(u-v)\operatorname{Cos}e^{u+v}e^{u+v}$ با جای‌گذاری در (۲) داریم: $\frac{dz}{du}=(\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y)۵(u-v)^{۴}-\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}y.e^{u+v}$ $\xrightarrow[y=e^{u+v}]{x=(u-v)^{۵}}\frac{dz}{du}=۵\operatorname{Cos}(u-v)^{۵}\operatorname{Cos}e^{u+v}(u-v)^{۴}(-۱)-\operatorname{Sin}(u-v)\operatorname{Cos}e^{u+v}$ حل د) با جای‌گذاری در (۱) داریم: $\frac{dz}{dv}=\frac{-۱}{x^{۲}}\times\frac{-۳}{(u+v)^{۲}}+(۱)\times\frac{۱}{۳}$ $\xrightarrow{x=\frac{۳}{u+v}}\frac{dz}{dv}=-\frac{۱}{(\frac{۳}{u+v})^{۲}}\times\frac{۳}{(u+v)^{۲}}+\frac{۱}{۳}v$ با جای‌گذاری در (۲) داریم: $\frac{dz}{du}=\frac{-۱}{x^{۲}}\times\frac{-۳}{(u+v)^{۲}}+\frac{۱}{۳}$ $\xrightarrow{x=\frac{۳}{u+v}}\frac{dz}{du}=\frac{۱}{(\frac{۳}{u+v})^{۲}}\times\frac{-۳}{(u+v)^{۲}}+\frac{۱}{۳}u$
۳۵۸	ز) $f(x,y)=y\sin x$ ح) $f(x,y)=(x-۱)^{۲}+۲y^{۲}$
۳۶۰	حل ز) ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم:

$f_x = y\mathrm{Cos}\,x \quad f_y = \mathrm{Sin}\,x \Rightarrow \begin{cases} f_x = \mathrm{Cos}\,x = ۰ \\ f_y = \mathrm{Sin}\,x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۰, \pi \quad , \quad y = ۰$ پس $(۰,۰)$ و $(\pi,۰)$ نقاط بحرانی هستند. $\Delta = f_{xx} = -y\mathrm{Sin}\,x \qquad B = f_{xy} = \mathrm{Cos}\,x \qquad C = f_{yy} = ۰$ بنابراین $\Delta = AC - B^۲ = -\mathrm{Cos}\,x$ حال $(\pi,۰)$ را بررسی می‌کنیم $\Delta(۰,۰) = -۱ < ۰$ چون $\Delta < ۰$ پس $(۰,۰)$ نقطه زینی است. حال نقطه $(۰,۰)$ را بررسی می‌کنیم: $\Delta(\pi,۰) = -۱ > ۰$ چون $\Delta < ۰$ نقطه $(\pi,۰)$ نقطه زینی است. حل ح) $f_x = ۲(x-۱) \quad f_y = ۴y \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \\ ۴y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases}$ پس $(۱,۰)$ نقطه بحرانی است. بنابراین $A > ۰ \quad , \quad \Delta = AC - B^۲ = ۸$ چون $۰ <$ و $A > ۰$ درنتیجه $(۱,۰)$ نقطه Min نسبی است.	
و) مینیمم تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ با محدودیت $x - ۲y + ۳z = ۴$ ح) مینیمم تابع $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ با محدودیت $۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۴$	۳۶۲
حل و) ابتدا تابع لاگرانژ را بدست می‌آوریم. $F(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - \lambda(x - ۲y - ۳z - ۴)$ حال مشتقات جزئی را بدست می‌آوریم:	۳۶۴

	$\begin{cases} F_x = ۲x - \lambda = ۰ \\ F_y = ۲y + ۲\lambda = ۰ \\ F_z = ۲z - ۳\lambda = ۰ \\ F_\lambda = ۴ - x + ۲y - ۳z = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{۲} \quad (۱) \\ y = -\lambda \quad (۲) \\ z = \frac{۳\lambda}{۲} \quad (۳) \\ ۴ - x + ۲y - ۳z = ۰ \quad (۴) \end{cases}$ حال رابطه (۱)، (۲) و (۳) را در رابطه ۴ قرار می‌دهیم $۴ - \left(\frac{\lambda}{۲}\right) + ۲(-\lambda) - ۳\left(\frac{۳\lambda}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow \frac{۱۴}{۲}\lambda = ۴ \Rightarrow \lambda = \frac{۴}{۷}$ حال $\lambda = \frac{۴}{۷}$ را در رابطه (۱)، (۲) و (۳) قرار می‌دهیم پس داریم: $x = \frac{۲}{۷}\ ,\ y = \frac{-۴}{۷}\ ,\ z = \frac{۶}{۷}$ پس $Min(\frac{۲}{۷}, \frac{-۴}{۷}, \frac{۶}{۷})$ نسبی می‌باشد.
۳۶۵	حل ح) ابتدا تابع لاگرانژ را مشخص می‌کنیم $F(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ = \lambda(۴x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ - ۴)$ حال مشتقات جزئی مرتبه اول را محاسبه می‌کنیم $\begin{cases} F_x = ۲x - ۸\lambda x = ۰ \\ F_y = ۲y - ۴\lambda y = ۰ \\ F_z = ۲z - \lambda z = ۰ \\ F_\lambda = ۴ - ۴x^۲ - ۲y^۲ - z^۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{۱}{۴}, x = ۰ \\ \lambda = \frac{۱}{۲}\ ,\ y = ۰ \\ \lambda = ۲\ ,\ z = ۲ \end{cases}$

	$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{۱}{۴} & z = y = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \to F = ۱ \\ \lambda = \frac{۱}{۲} & x = z = ۰ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \to F = ۲ \\ \lambda = ۲ & y = z = ۰ \Rightarrow z = \pm ۲ \to F = ۱ \end{cases}$ نقاط $(\pm۱,۰,۰)$ و Min نسبی هستند.
۳۶۸	ه) $f(x,y) = e^{\frac{(۱-x)}{y}}$ حل هـ) $y \neq ۰ \Rightarrow D_f : \{(x,y)/ y \neq ۰\}$
۳۷۱-۳۷۰	۵- اگر تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ حل: آن‌گاه در پیوستگی آن در نقطه (۰و۰) بحث کنید. باید نشان دهیم $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲}$ در این صورت بنا به تعریف حد داریم: $\forall \varepsilon > ۰ \exists S \geq ۰ \quad s.t(\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۰)^۲} < ۸ \Rightarrow \left\| \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} - ۰ \right\| < ۴$ $\Rightarrow \left\| \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲} \right\| = \frac{\|x\|\|y^۲\|}{\|x^۲+y^۲\|} \leq \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}(x^۲+y^۲)}{(x^۲+y^۲)} = \sqrt{x^۲+y^۲} < ۴$ با انتخاب S=۴ به حکم می‌رسیم. در این صورت چون مقدار تابع برابر صفر است پس تابع پیوسته است.
۳۷۱	د) $f(x,y) = xe^y + ۲xy$ و) $f(x,y) = \cos(\sin xy)$
۳۷۲	حل د) $f_x = e^y + ۲y \qquad f_{xx} = ۰ \qquad f_{xy} = e^y + ۲$

$f_y = ne^y + ۲x \qquad f_{yy} = xe^y \quad f_{yx} = e^y + ۲$	
حل و) $f_x = -y\,Cos(xy)\,Sin(Sin(xy))$ $f_y = -x\,Cos(xy)\,Sin(Sin(xy))$ $f_{xx} = y^۲ \sin(xy)\sin(\sin(xy)) + y\cos(xy)\cos(\sin(xy))$ $-y\cos(xy)$ $f_{xy} = -\cos(xy)\sin(\sin(xy)) + xy\sin(xy)\sin(\sin(xy))$ $+x\cos(xy)\cos(\sin(xy))$ $f_{yy} = x^۲ \sin(xy)\sin(\sin(xy)) + x\cos(xy)\cos(\sin(xy))$ $(-x)\cos(xy)$ $f_{yx} = -\cos(xy)\sin(\sin(xy)) + yx\sin(xy)\sin(\sin(xy))$ $+y\cos(xy)\sin(\sin(xy))(-x)\cos(xy)$	۳۷۲
د) $f(x,y,z) = \frac{xy+yz}{xz}$ ه) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$ و) $f(x,y,z) = \frac{۲x+y+z}{e^{xyz}}$	۳۷۲
حل د) $f_x = \frac{-y}{x^۲} \qquad f_{xx} = \frac{yx^۲}{x^۴} = \frac{y}{x^۲}$ $f_y = \frac{(x+z)(xz) - z(xy+yz)}{(xz)^۲} = (x+z) - \frac{xy+yz}{x^۲ z}$ $f_{yy} = \frac{-x+z}{x^۲ z}$ $f_z = \frac{-y}{z^۲} \qquad f_{zz} = \frac{+۲zy}{z^۴} = \frac{۲y}{z^۳}$ حل هـ) $f_x = -yz\,Sin(xyz) \qquad f_{xx} = -y^۲ z^۲\,Cos(xyz)$ $f_y = -xz\,Sin(xyz) \qquad f_{yy} = -x^۲ z^۲\,Cos(xyz)$	۳۷۳

<table>
<tr>
<td>

$f_z = -xy\mathrm{Sin}(xyz) \qquad f_{zz} = -x^۲y^۲\,\mathrm{Cos}(xyz)$

حل و) $f_x = \dfrac{۲e^{xyz} - (yz)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۲}$

$$f_{xx} = \frac{(۲yze^{xyz} - y^۲z^۲e^{xyz})۲e^{xyz} - ۲yze^{xyz}(۲e^{xyz} - (yz)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۲}$$

$$f_y = \frac{e^{xyz} - (xz)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۲}$$

$$f_{yy} = \frac{yze^{xyz} - x^۲z^۲e^{xyz}(۱)e^{xyz} - ۲xze^{xyz}(e^{xyz} - (xz)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۴}$$

$$f_z = \frac{e^{xyz} - (xy)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۲}$$

$$f_{yy} = \frac{xye^{xyz} - x^۲y^۲e^{xyz}(۱)(e^{xyz})^۲ - ۲e^{xyz}(xy)(e^{xyz} - (xy)e^{xyz}(۲x+y+z)}{(e^{xyz})^۴}$$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

و) $f(x,y,z) = z^۲\sin(۲x-۳y)$

حل) $df = (۲z^۲\mathrm{Cos})۲x-۴y)dx + (-۳z^۲\mathrm{Cos}(۲x-۳y)dy) + ۴z\mathrm{Sin}(۲x-۳y)dz$

و

د) $f(x,y) = xy^۲$ که در آن $x = \cos(t+۱)$ و $y = \tan ۲t$.

</td>
<td>۳۷۴</td>
</tr>
<tr>
<td>

حل د) $\dfrac{df}{dt} = y^۲(-\mathrm{Sin}(t+۱)) + (۲xy(۲+۲\tan^۲ ۲t)$

ج) $f(x,y) = \ln xy$ که در آن $x(u,v) = e^{uv^۲}$ و $y(u,v) = e^{uv}$.

د) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ که در آن $x(u,v) = \dfrac{۱}{u+v}$ و $y(u,v) = \dfrac{۱}{u-v}$.

</td>
<td>۳۷۵</td>
</tr>
</table>

	حل ج) $\frac{\partial f}{\partial u}=(\frac{y}{xy})(v^{۲}e^{uv^{۲}})+\frac{x}{xy}(ve^{uv})$ $\frac{\partial f}{\partial v}=(\frac{y}{xy})(۲vue^{uv^{۲}})+(\frac{x}{xy})(ue^{uv})$
۳۷۶	حل د) $\frac{\partial f}{\partial u}=(\frac{۱}{y})(\frac{-۱}{(u+v)^{۲}})+(\frac{-x}{y^{۲}})(\frac{-۱}{(u-v)^{۲}})$ $\frac{\partial f}{\partial v}=(\frac{۱}{y})(\frac{-۱}{(u+v)^{۲}})+(\frac{-x}{y^{۲}})(\frac{۱}{(u-v)^{۲}})$
۳۷۷	د) $f(x,y)=(۱+x^{۲}+y^{۲})e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}$
۳۷۸	حل د) ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم: $\begin{cases} f_x=۲xe^{۱-x^{۲}-y^{۲}}-۲x(۱+x^{۲}+y^{۲})e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}=۰ \\ f_y=۲ye^{۱-x^{۲}-y^{۲}}-۲y(۱+x^{۲}+y^{۲})e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}=۰ \end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases} -(x^{۲}+y^{۲})۲xe^{۱-x^{۲}-y^{۲}}=۰ \\ -(x^{۲}+y^{۲})۲ye^{۱-x^{۲}-y^{۲}}=۰ \end{cases}\Rightarrow x=۰,\ y=۰$` پس (۰و۰) نقطه بحرانی می‌باشد. حال $\Delta$ را تشکیل می‌دهیم: $A=f_{xx}=e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}(-۶x^{۲}-۲y^{۲})+e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}(۴x^{۲}+۴x^{۲}y^{۲})$` $B=f_{xy}=-۴xe^{۱-x^{۲}-y^{۲}}-۶ye^{۱-x^{۲}-y^{۲}}(-۲x^{۳}-۲xy^{۲})$` $C=f_{yy}=(-۶y^{۲}-۲x^{۲})e^{۱-x^{۲}-y^{۲}}-۲ye^{۱-x^{۲}-y^{۲}}(-۲x^{۲}y-۲y^{۳})$` در این صورت $\Delta(۰,۰)=AC-B^{۲}=۰$
۳۷۹	د) $f(x,y,z)=x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}$ با محدودیت $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$
۳۸۱-۳۸۰	حل د) تابع لاگرانژ آن عبارت است از:

$$F(x,y,z)=x^۴+y^۴+z^۴-\lambda(۱-x^۲-y^۲-z^۲)$$

$$\begin{cases} f_x=۴x^۳-۲\lambda x=۰\\ f_y=۴y^۳-۲\lambda y=۰\\ f_z=۴z^۳-۲\lambda z=۰\\ f_\lambda=۱-x^۲-y^۲-z^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۰\ ,\ x^۲=\frac{\lambda}{۲} & (۱)\\ y=۰\ ,\ y^۲=\frac{\lambda}{۲} & (۲)\\ z=۰\ ,\ z^۲=\frac{\lambda}{۲} & (۳)\\ ۱-x^۲-y^۲-z^۲=۰ & (۴) \end{cases}$$

حال روابط (۱) و (۲) و (۳) در رابطه (۴) قرار می‌دهیم:

$$۱-\frac{\lambda}{۲}-\frac{\lambda}{۲}-\frac{\lambda}{۲}=۰ \qquad ۱-\frac{۳}{۲}\lambda=۰\Rightarrow\lambda=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

حال $\lambda=\frac{۲}{۳}$ را در روابط (۱)، (۲) و (۳) قرار می‌دهیم. داریم:

$$x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} \qquad y=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ ,\ z=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow f(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۱}{۳}$$

پس $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ Min می‌باشند.

$$f(۰,۰,\pm۱)=f(۰,\pm۱,۰)=f(\pm۱,۰,۰)=۱$$

در این صورت $(\pm۱,۰,۰),(۰,\pm۱,۰),(۰,۰,\pm۱)$ Max نسبی هستند.